Полтавська область 2015-2016
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: інформатики, економіки

9 клас

I рівень

1. Розв'язати рівняння $ax^2-(a-1)x-1=0$, a – параметр.

Розв'язання.

1. $ax^2-(a-1)x-1=0 \Leftrightarrow (ax+1)(x-1)=0.$ Якщо $a=-1, a=0,$ то $x=1;$ в інших випадках $x=1, x=-\frac{1}{a}.$

2. Знайти останню цифру числа 2^{2016}.

Розв'язання.

2. Проаналізувати закономірність для степенів двійки. Відповідь: 6.

3. Знайти сторони трикутника, дві медіани якого перпендикулярні і рівні 3 та 4.

Розв'язання.

3. $\triangle ABC: AA'=3, CC'=4 \Rightarrow AO=2, A'O=1, CO=\frac{8}{3}, C'O=\frac{4}{3},$ де O – точка перетину медіан. За теоремою Піфагора $AC=\frac{10}{3}, AB=\frac{2\sqrt{52}}{3}, BC=\frac{2\sqrt{73}}{3}.$

II рівень

4. Обчислити $a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(b+a)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca),$ якщо $a+b+c=0.$

Розв'язання.

4. Підставити $c=-(a+b).$ Відповідь: 0.

5. Довести нерівність $2a^2+2b^2+c^2 \ge 3ab+ac+bc.$

Розв'язання.

5. Додати дві відомі нерівності $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca, a^2+b^2 \ge 2ab.$

III рівень

6. У трапеції $ABCD(AD \parallel BC)$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці P, а кутів C і D – в точці Q. Довести, що $PQ \parallel AD.$

Розв'язання.

6. Нехай K, L – середини бічних сторін AB, CD трапеції відповідно. Тоді $\angle APB=180^\circ-(\angle PBA+\angle PAB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=90^\circ.$ Тобто PK – медіана прямокутного трикутника, тому $PK=KB=KA \Rightarrow \angle KPB=\angle KBP=\angle PBC \Rightarrow KP \parallel BC.$ Отже, точка P належить середній лінії KL трапеції. Аналогічно $Q \in KL \Rightarrow PQ \parallel AD.$

7. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2+y^2=3^{2016}.$

Розв'язання.

7. Перебравши остачі від ділення на 3, маємо твердження: якщо $a^2+b^2 \vdots 3,$ то $a \vdots 3, b \vdots 3.$ Тоді з рівняння випливає $x=3x_1, y=3y_1.$ Після підстановки одержимо $x_1^2+y_1^2=3^{2014}.$ Аналогічно $x_1=3x_2, y_1=3y_2, x_2^2+y_2^2=3^{2012},$ і т.д. … $x_{1008}^2+y_{1008}^2=1.$ Розв'язки цього рівняння очевидні. Відповідь: $(\pm 3^{1008}, 0), (0, \pm 3^{1008}).$

<u>10 клас</u>

I рівень

1. Розв’язати нерівність $ax^2+(a-1)|x|-1<0, \quad a$ – параметр.

Розв’язання.

1. $ax^2+(a-1)|x|-1<0 \Leftrightarrow (a|x|-1)(|x|+1)<0 \Leftrightarrow a|x|-1<0.$ Якщо $a\le 0,$ то $x\in(-\infty,+\infty);$ якщо $a>0,$ то $x\in\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right).$

2. Чи існує таке натуральне число n, що числа $\sqrt{n-1},\sqrt{n},\sqrt{n+1}$ утворюють арифметичну прогресію?

Розв’язання.

2. Нехай існує, тоді кщо $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n^2-1}=n$ - хибне. Відповідь: не існує.

3. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{x}{1+x+x^2}.$

Розв’язання.

3. Якщо $x=0,$ то $y=0.$ Якщо $x\ne 0,$ то $y=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+1}.$ Але тоді $x+\frac{1}{x}\le -2$ або $x+\frac{1}{x}\ge 2,$ тому $-1\le y<0$ або $0<y\le\frac{1}{3}.$ Відповідь: $-1\le y\le\frac{1}{3}.$

II рівень

4. Знайти площу трикутника $ABC,$ якщо $AC=4, BC=3,$ а сторона AB ділиться точкою дотику вписаного в трикутник кола у відношенні 3:2.

Розв’язання.

4. Нехай вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторін трикутника в точках $P\in BC, Q\in CA, R\in AB.$ Тоді $CQ=CP=x, AQ=AR=4-x, BR=BP=3-x.$ Очевидно $AR>BR,$ тому $\dfrac{AR}{BR}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{4-x}{3-x}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=1\Rightarrow AB=5.$ За оберненою теоремою Піфагора $\angle ACB=90^\circ.$ Площа трикутника ABC дорівнює 6.

5. Довести, що число $\sqrt[3]{6}$ – ірраціональне.

Розв’язання.

5. Нехай $\sqrt[3]{6}$ – раціональне, тоді $\sqrt[3]{6}=\dfrac{p}{q};\quad p,q\in N, НСД(p,q)=1.$ Звідси $p^3=6q^3\Rightarrow$ $\Rightarrow p\,\vdots\,2\Rightarrow p=2r, r\in N.$ Підставимо в рівняння і скоротимо на 2: $4r^3=3q^3\Rightarrow q\,\vdots\,2.$ Отже, числа p,q – парні, що суперечить їх взаємній простоті.

III рівень

6. У трапеції $ABCD(AD\parallel BC)$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці P, а кутів C і D – в точці Q. Довести, що $PQ=\frac{1}{2}|AD+BC-AB-CD|.$

Розв’язання.

6. Нехай K,L - середини бічних сторін AB,CD трапеції відповідно. Тоді $\angle APB=180^\circ-(\angle PBA+\angle PAB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)=90^\circ.$ Тобто PK - медіана прямокутного трикутника, тому $PK=KB=KA\Rightarrow\angle KPB=\angle KBP=\angle PBC\Rightarrow KP\parallel BC.$ Отже, точка P

належить середній лінії KL трапеції. Аналогічно $Q \in KL$. Тоді $PQ = |KL - KP - QL|$, звідси маємо потрібну рівність.

7. Нехай a, b, c – сторони трикутника. Довести нерівність $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

Розв'язання.

7. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc) > 0$, так як у трикутника $a+b-c>0$, до того ж $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(a+c)^2+(c+b)^2\right) > 0$.

<u>11 клас</u>

І рівень

1. Розв'язати нерівність $|x-1| \ge |x-a|$, де a – параметр.

Розв'язання.

1. $|x-1| > |x-a| \Leftrightarrow (x-1)^2 > (x-a)^2 \Leftrightarrow 2x(a-1) > a^2-1$. Якщо $a=1$, то розв'язків немає, якщо $a>1$, то $x \in \left(\frac{a+1}{2}, +\infty\right)$, якщо $a<1$, то $x \in \left(-\infty, \frac{a+1}{2}\right)$.

2. Обчислити $\arcsin(\sin 100^\circ)$.

Розв'язання.

2. $\arcsin(\sin 100^\circ) = \arcsin(\sin 80^\circ) = \arcsin\left(\sin\frac{4}{9}\pi\right) = \frac{4}{9}\pi$.

3. В трикутнику ABC на стороні AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає сторони AB, BC в точках P, Q. Відомо, що $AC \parallel PQ$. Довести, що трикутник ABC - рівнобедрений.

Розв'язання.

3. Нехай $P \in AB, Q \in BC$, тоді $APQC$ – вписана в коло трапеція, тобто $AP = QC$. Маємо $\triangle APC = \triangle CQA\left(AP = QC, AC = CA, \angle APC = \angle CQA = 90^\circ\right)$. Звідси випливає рівність висот $AQ = PC$ і рівність відповідних сторін.

ІІ рівень

4. Розв'язати рівняння $\sin x + \sin\sqrt{\pi x} = y^2 - 2y + 3$.

Розв'язання.

4. $y^2 - 2y + 3 = (y-1)^2 + 2 \ge 2, \sin x + \sin\sqrt{\pi x} \le 2$, отже $y = 1, \sin x = 1, \sin\sqrt{\pi x} = 1$. Звідси $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $\sqrt{\pi x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow x = \pi\left(k^2 + 2k + \frac{1}{4}\right), k \in Z, k \ge 0$. Відповідь: рівняння розв'язків не має.

5. Із протилежних вершин паралелограма на площину, яка проходить через дві інші вершини, опущено перпендикуляри. Довести, що ці перпендикуляри рівні.

Розв'язання.

5. Нехай AP, CQ - перпендикуляри, O – точка перетину діагоналей паралелограма. Тоді $\triangle PAO = \triangle QCO\left(AO = OC, \angle PAO = \angle QCO = 90^\circ, \angle AOP = \angle COQ\right) \Rightarrow AP = CQ$.

ІІІ рівень

6. Чи існує таке натуральне число n, що числа $\ln(n-1), \ln n, \ln(n+1)$ утворюють геометричну прогресію?

Розв'язання.

6. Нехай існує. Тоді $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln n}{\ln(n-1)}$ $(n \geq 3)$. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{\ln(x-1)}$. Ця функція визначена і спадає при $x>2$. Дійсно, $f'(x)=\frac{(x-1)\ln(x-1)-x\ln x}{x(x-1)\ln^2(x-1)}<0$. Звідси $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}<\frac{\ln n}{\ln(n-1)}$ $(n \geq 3)$. Відповідь: не існує.

7. Довести нерівність $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2$, де $a>0, b>0, c>0$.

Розв'язання.

7. За нерівністю Коші маємо $\frac{a^3}{b}+ab \geq 2a^2, \frac{b^3}{c}+bc \geq 2b^2, \frac{c^3}{a}+ca \geq 2c^2$. Залишається додати ці нерівності і скористатися нерівністю трьох квадратів:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 2a^2-ab+2b^2-bc+2c^2-ca=a^2+b^2+c^2+\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) \geq a^2+b^2+c^2.$$