Полтавська область 2015-2016
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: математики, прикладної математики, математичного моделювання

9 клас

I рівень

1. Розв'язати рівняння $\left||x-1|+|x+1|-1\right|=x^2-2.$

Розв'язання.

1. Зрозуміло, що $x^2-2\ge 0,$ тому достатньо розглянути випадки $x\le -\sqrt{2}, x\ge \sqrt{2}.$ Відповідь: $x=\pm\left(\sqrt{2}+1\right).$

2. Порівняти числа $\sqrt{2016+\sqrt{2015}}+\sqrt{2016-\sqrt{2015}}$ і $\sqrt{2015+\sqrt{2014}}+\sqrt{2015-\sqrt{2014}}.$

Розв'язання.

2. Нехай $f(t)=\sqrt{t+1+\sqrt{t}}+\sqrt{t+1-\sqrt{t}}, t\ge 0.$ Тоді $f^2(t)=2t+2+2\sqrt{t^2+t+1}$ зростає. Тому $f(2015)=\sqrt{2016+\sqrt{2015}}+\sqrt{2016-\sqrt{2015}}>f(2014)=\sqrt{2015+\sqrt{2014}}+\sqrt{2015-\sqrt{2014}}.$

3. Знайти площу трапеції $ABCD$, у якої $AB=BC=CD=5, DA=11.$

Розв'язання.

3. Нехай BK – висота трапеції, тоді $AK=\dfrac{AD-BC}{2}=3,$ $BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=4.$ Знаходимо площу $S=\dfrac{5+11}{2}\cdot 4=32.$

II рівень

4. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2+ax+2=0$ є найменшою?

Розв'язання.

4. $D=a^2-8\ge 0.$ $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=a^2-4=\left(a^2-8\right)+4\ge 4,$ причому рівність досягається при $a^2=8,$ тобто $a=\pm 2\sqrt{2}.$

5. В трикутнику ABC на стороні AC задано точку D таку, що $\angle BDC=\angle ABC.$ Відомо, що $AD=7, DC=9.$ Знайти $BC.$

Розв'язання.

5. $\triangle ABC\sim\triangle BDC\Rightarrow \dfrac{BC}{DC}=\dfrac{AC}{BC}\Rightarrow BC=\sqrt{DC\cdot AC}=12.$

III рівень

6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^3+y=2, \\ x+y^3=2. \end{cases}$

Розв'язання.

6. Розв'язок $x=y=1$ – очевидний. Нехай $x\ne 1.$ Не втрачаючи загальності можна вважати, що $x>1,$ тоді $y<1.$ Якщо $y\in(-\infty,-1]\cup[0,1),$ то $x^3>x, y\ge y^3,$ тоді $2=x^3+y>x+y^3=2,$ що є хибним, розв'язків немає. Якщо ж $y\in(-1,0),$ то з рівняння $x^3=2-y$ випливає $x\in\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}\right).$ Але $x=2-y^3>2,$ отже і в цьому випадку розв'язків немає. Відповідь: $x=y=1.$

7. Знайти всі цілі числа $x, y, z,$ для яких $x^3+y^3+z^3=3xyz+4.$

Розв'язання.

7.Маємо

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4,(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=4,(x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)=8.$$

Залишається розглянути випадки розкладу числа 8 на множники

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=8; \end{cases} \begin{cases} x+y+z=2, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4; \end{cases} \begin{cases} x+y+z=4, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=8, \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=1. \end{cases}$$ Аналіз систем доцільно розпочинати з другого рівняння.

Відповідь: (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1).

10 клас

I рівень

1. Розв'язати нерівність $\left|x^2-5x+6\right|>x^2-7x+10.$

Розв'язання.

1. $\left|(x-2)(x-3)\right|>(x-2)(x-5).$ Очевидно $x\neq 2.$ Розглянемо випадки.

а) $x\in(2,3)\Rightarrow -(x-2)(x-3)>(x-2)(x-5)\Rightarrow 3-x>x-5\Rightarrow x<4.$ Отже $x\in(2,3).$

б) $x\in(-\infty,2)\cup[3,+\infty)\Rightarrow (x-2)(x-3)>(x-2)(x-5)\Rightarrow 2(x-2)>0.$ Отже $x\in[3,+\infty).$

Відповідь: $x\in(2,+\infty).$

2. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо сума її членів з парними номерами вчетверо менша від суми членів з непарними номерами.

Розв'язання.

2. Нехай q – знаменник прогресії $(|q|<1)$. Тоді сума членів з непарними номерами дорівнює $S_1=\dfrac{a}{1-q^2},$ сума членів з парними номерами дорівнює $S_2=\dfrac{aq}{1-q^2}.$ З умови випливає $S_1=4S_2\Rightarrow \dfrac{a}{1-q^2}=4\dfrac{aq}{1-q^2}\Rightarrow q=\dfrac{1}{4}.$

3. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 5, один із катетів 4. Знайти бісектрису трикутника, проведену з вершини більшого гострого кута трикутника.

Розв'язання.

3. Нехай ABC – прямокутний трикутник з гіпотенузою $AB=5,$ катетами $AC=4$ і $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3.$ Шукана бісектриса $BD.$ За властивістю бісектриси трикутника $\dfrac{BC}{DC}=\dfrac{BA}{DA}\Rightarrow CD=1,5\Rightarrow BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=1,5\sqrt{5}.$

II рівень

4. Довести нерівність $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq 1,$ де $a+b+c=1, a>0, b>0, c>0.$

Розв'язання.

4. Застосуємо нерівність Коші-Буняковського для наборів $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}};\dfrac{b}{\sqrt{c}};\dfrac{c}{\sqrt{a}}\right)$ та $\left(\sqrt{b};\sqrt{c};\sqrt{a}\right)$ Тоді $\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)(b+c+a)\geq(a+b+c)^2\Rightarrow \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq 1.$

5. Знайти всі прості числа $x, y, z,$ для яких $x^2 + 4y^2 = z^2.$

Розв'язання.

5. Зрозуміло, що $z \neq 2,$ отже є непарним, тому x теж непарне. Тоді $z = 2n+1, x = 2m+1.$ Маємо $4y^2 = (2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 4(n-m)(n+m+1) \vdots 8 \Rightarrow y \vdots 2 \Rightarrow y = 2.$ Одержимо рівняння $z^2 - x^2 = 16 \Rightarrow (z-x)(z+x) = 16.$ Залишається розглянути розклад 16 в добуток різних парних множників $z - x = 2, z + x = 8 \Rightarrow z = 5, x = 3.$ Відповідь: $x = 3, y = 2, z = 5.$

III рівень

6. При якому значенні параметра a система рівнянь $\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+zx=a, \\ xyz=1 \end{cases}$ має рівно три розв'язки?

Розв'язання.

6. За формулами Вієта x, y, z – корені кубічного рівняння $t^3 - at^2 + at - 1 = 0.$ З умови випливає, що це рівняння має три дійсні корені, рівно два з яких збігаються. $t^3 - at^2 + at - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 - (a-1)t + 1\right) = 0.$ Очевидно $t = 1$ – корінь рівняння. Залишається розглянути два випадки: цей корінь кратний, цей корінь простий. В першому випадку $t = 1$ – корінь квадратного рівняння $t^2 - (a-1)t + 1 = 0 \Rightarrow a = 3.$ Але тоді маємо $t = 1$ – корінь кратності 3. В другому випадку дискримінант квадратного рівняння $t^2 - (a-1)t + 1 = 0$ дорівнює 0, тобто $a = 3$ або $a = -1.$ Відповідь: $a = -1.$

7. Коло радіуса 1 поділено точками A, B, C, D поділено на чотири рівні дуги. Знайти максимальне значення виразу $AM^4 + BM^4 + CM^4 + DM^4,$ де точка M належить колу.

Розв'язання.

7. Розмістимо коло на координатній площині так, що $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1).$ Тоді довільна точка має координати $M(\cos\alpha, \sin\alpha).$ Шукана сума дорівнює

$$\left((1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\right)^2 + \left(\cos^2\alpha + (1-\sin\alpha)^2\right)^2 + \left((-1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\right)^2 + \left(\cos^2\alpha + (-1-\sin\alpha)^2\right)^2 =$$

$= (2-2\cos\alpha)^2 + (2-2\sin\alpha)^2 + (2+2\cos\alpha)^2 + (2+2\sin\alpha)^2 = 24.$ Шукана сума не залежить від точки M і завжди дорівнює 24.

11 клас

I рівень

1.Розв'язати рівняння $2\lg x + \lg|x-1| = 2\lg 2.$

Розв'язання.

1. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1;$ $x^2|x-1| = 4.$ Розглянути випадки $x > 1$ та $0 < x < 1.$ Відповідь: $x = 2.$

2. Обчислити $\arccos\left(\cos 610^\circ\right).$

Розв'язання.2.

$$\arccos\left(\cos 610^\circ\right) = \arccos\left(\cos 110^\circ\right) = \arccos\left(\cos\frac{11}{18}\pi\right) = \frac{11}{18}\pi.$$

3. У трикутника центри вписаного і описаного кіл збігаються. Довести, що трикутник правильний.

Розв'язання.

3. Нехай O – центр кіл трикутника ABC, точки D, E, F – основи перпендикулярів, проведених з O до сторін BC, CA, AB відповідно. Тоді $OA = OB = OC, OD = OE = OF$. Маємо $\triangle AFO = \triangle BFO = \triangle BDO = \triangle CDO = \triangle CEO = \triangle AEO$ за катетом і гіпотенузою. Звідси $AF = FB = BD = DC = CE = EA,$ тобто $AB = BC = CA.$

II рівень

4. Три числа, які є послідовними елементами геометричної прогресії, є також третім, тринадцятим і п'ятнадцятим членами арифметичної прогресії відповідно. Знайти ці числа, якщо їх сума дорівнює 62.

Розв'язання.

4. Задані числа мають вигляд $a, aq, aq^2.$ Тоді $\frac{aq-a}{10} = \frac{aq^2-aq}{2}.$ Звідси $q = \frac{1}{5}.$ Маємо $a + \frac{1}{5}a + \frac{1}{25}a = 62, a = 50.$ Відповідь: 50, 10, 2.

5. Довести нерівність $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab},$ де $a, b \ge 0.$

Розв'язання.

5. За нерівністю Коші $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} = \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{b}} = 5\sqrt[5]{ab}.$

III рівень

6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \sin y = 2x, \\ \operatorname{tg} y + \sin x = 2y, \end{cases}$ де $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$

Розв'язання.

6. Доведемо нерівність $\operatorname{tg} x + \sin x \ge 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$ Нехай $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$ Тоді $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) + \cos x - \cos^2 x \ge \cos x(1 - \cos x) \ge 0.$ Отже, функція $f(x)$ зростає, тобто $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x \ge f(0) = 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ Причому рівність лише при $x = 0.$ Далі, додавши рівняння системи, маємо $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \sin x + \sin y = 2x + 2y.$ Враховуючи доведену нерівність, маємо $x = y = 0.$

7. Знайти суму квадратів відстаней від довільної точки сфери, вписаної в куб зі стороною *a*, до вершин куба.

Розв'язання.

7. Розмістимо куб в декартовій системі координат так, що його центр збігається з початком координат, а грані паралельні одній з координатних площин. Тоді вершини куба матимуть кординати виду $\left(\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right),$ а рівняння вписаної в куб сфери $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}.$ Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери шукана сума дорівнює

$$\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right) +$$

$$+\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2\right)=8\left(x^2+y^2+z^2\right)+6a^2=8a^2.$$