Полтавська область 2015-2016
Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
Секції: техніки
9 клас

I рівень

1. При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2+2(a+1)x+4=0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

1. $a=0 \Rightarrow x=-2;\quad a\neq 0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow a=1.$ Відповідь: $a=0, a=1.$

2. Знайти останню цифру числа 3^{2016}.

Розв'язання.

2. Проаналізувати закономірність для степенів трійки. Відповідь: 1.

3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13, а висота, проведена до основи дорівнює 12. Знайти суму середніх ліній трикутника.

Розв'язання.

3. $\triangle ABC: AB=BC=13, BD=12$ – висота. Тоді $AD=5 \Rightarrow AB=10.$ Відповідь: 18.

II рівень

4. Спростити вираз $\dfrac{x}{xy-2y^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2xy-2y}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right).$

Розв'язання.

4. $\dfrac{x}{xy-2y^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2xy-2y}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)=\dfrac{x}{y(x-2y)}-\dfrac{2(x+1)}{(x-2y)(x+1)}=\dfrac{1}{y}.$

5. Знайти хоча б одну пару натуральних чисел, сума квадратів яких дорівнює 5^{2016}.

Розв'язання.

5. Очевидно $3^2+4^2=5^2 \Rightarrow 3^2\cdot 5^{2014}+4^2\cdot 5^{2014}=5^{2016} \Rightarrow \left(3\cdot 5^{1007}\right)^2+\left(4\cdot 5^{1007}\right)^2=5^{2016}.$

III рівень

6. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторін трикутника в точках $P, Q, R.$ Знайти кути трикутника PQR, якщо кути трикутника ABC дорівнюють $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ.$

Розв'язання.

6. Нехай для конкретності $\angle A=40^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=80^\circ; P\in BC, Q\in CA, R\in AB.$ Тоді $AR=AQ \Rightarrow \angle ARQ=\angle AQR=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle A\right)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A;$ аналогічно $\angle BRP=\angle BPR=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B,$ $\angle CPQ=\angle CQP=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C.$ Тоді $\angle RPQ=180^\circ-\angle BPR-\angle CPQ=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C),$ аналогічно $\angle PQR=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C), \angle QRP=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B).$ За цими формулами маємо кути $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ.$

7. Довести нерівність $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{a+b}{2}\le 1+\dfrac{ab}{3},$ де $a,b\in[0,1].$

Розв'язання.

7. В результаті тотожних перетворень нерівності одержимо $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{a+b}{2}\le 1+\dfrac{ab}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2a^2+2ab^2-3a^2-3b^2-4ab+3a+3b\ge 0 \Leftrightarrow 2(a+b)(1-a)(1-b)+a(1-a)+b(1-b)\ge 0,$ остання нерівність очевидно є істиною при $a,b\in[0,1].$

10 клас

I рівень

1. При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2+4x+1>0$ має розв'язки?

Розв'язання.

1. Нерівність має розв'язки завжди. Наприклад, $x=0$ – розв'язок при будь-якому значенні параметра.

2. A дорівнює 10 відсотків від B, B дорівнює 20 відсотків від C, C дорівнює 30 відсотків від D, E дорівнює 40 відсотків від D. Скільки відсотків від E становить A?

Розв'язання.

2. $A=0{,}1B=0{,}1\cdot 0{,}2C=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3D=0{,}006D; E=0{,}4D \Rightarrow \dfrac{A}{E}=0{,}015.$ Відповідь: 1,5 відсотка.

3. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Розв'язання.

3. Якщо $x=0,$ то $y=0.$ Якщо $x\neq 0,$ то $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}.$ Але тоді $x+\dfrac{1}{x}\le -2$ або $x+\dfrac{1}{x}\ge 2,$ тому $-\dfrac{1}{2}\le y<0$ або $0<y\le\dfrac{1}{2}.$ Відповідь: $-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}.$

II рівень

4. Знайти площу паралелограма $ABCD,$ якщо $AC=4, AB=5, BC=3.$

Розв'язання.

4. За оберненою теоремою Піфагора $AB^2=AC^2+BC^2\Rightarrow\angle BCA=90^\circ.$ Площа паралелограма дорівнює пдвоєній площі прямокутного трикутника ABC, тобто 12.

5. Довести, що число $\sqrt[3]{2}$ – ірраціональне.

Розв'язання.

5. Нехай $\sqrt[3]{2}$ – раціональне, тоді $\sqrt[3]{2}=\dfrac{p}{q};\quad p,q\in N, НСД(p,q)=1.$ Звідси $p^3=2q^3\Rightarrow$ $\Rightarrow p\,\vdots\,2\Rightarrow p=2r, r\in N.$ Підставимо в рівняння і скоротимо на 2: $4r^3=q^3\Rightarrow q\,\vdots\,2.$ Отже, числа p,q – парні, що суперечить їх взаємній простоті.

III рівень

6. Коло, вписане в трикутник $ABC,$ дотикається до сторін трикутника в точках $P,Q,R.$ Дано, що трикутники ABC і PQR подібні. Довести, що трикутник ABC правильний.

Розв'язання.

6. Нехай для конкретності $\angle A\le\angle B\le\angle C;\quad P\in BC, Q\in CA, R\in AB.$ Тоді $AR=AQ\Rightarrow\angle ARQ=\angle AQR=\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-\angle A\right)=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A;$ аналогічно $\angle BRP=\angle BPR=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle B,$ $\angle CPQ=\angle CQP=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle C.$ Тоді $\angle RPQ=180^\circ-\angle BPR-\angle CPQ=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C),$ аналогічно $\angle PQR=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle C), \angle QRP=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B).$ Маємо $\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B)\le\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle C)\le\dfrac{1}{2}(\angle C+\angle B).$ З подібності трикутників випливає рівність відповідних кутів, тобто $\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B), \angle B=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle C), \angle C=\dfrac{1}{2}(\angle C+\angle B)\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C.$ Тобто трикутник ABC є правильним.

7. Довести нерівність $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge 33\frac{1}{3}$, де $a>0, b>0, c>0, a+b+c=1$.

Розв'язання.

7. Використаємо нерівності між середніми квадратичним, арифметичним і гармонічним

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(1+\frac{9}{a+b+c}\right)^2=33\frac{1}{3}.$$

11 клас

I рівень

1. Спростити $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$.

Розв'язання.

1. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8=\log_2 3\frac{\log_2 4}{\log_2 3}\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\frac{\log_2 6}{\log_2 5}\frac{\log_2 7}{\log_2 6}\frac{\log_2 8}{\log_2 7}=\log_2 8=3.$

2. Обчислити $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}105^\circ\right)$.

Розв'язання.

2. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}105^\circ\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7}{12}\pi\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right)=-\frac{5}{12}\pi.$

3. У рівнобедреному трикутнику ABC на основі AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає бічні сторони AB, BC в точках P, Q. Довести, що $AC \parallel PQ$.

Розв'язання.

3. Нехай $P\in AB, Q\in BC$, маємо $APQC$ – вписаний в коло чотирикутник, тоді $\angle A+\angle Q=\angle P+\angle C=180^\circ$. Але $\angle A=\angle C\Rightarrow \angle P+\angle A=180^\circ\Rightarrow AC\parallel PQ$.

II рівень

4. Чи існує таке натуральне число n, що числа $\ln(n-1), \ln n, \ln(n+1)$ утворюють арифметичну прогресію?

Розв'язання.

4. Нехай існує. Тоді $\ln(n+1)+\ln(n-1)=2\ln n\Rightarrow \ln\left(n^2-1\right)=\ln n^2\Rightarrow n^2-1=n^2$ – хибне. Відповідь: не існує.

5. З точки M на площину проведено дві похилі довжиною 10 і 17. Їх проекції відносяться як 2 до 5. Знайти відстань від точки M до площини.

Розв'язання.

5. Нехай N – проекція точки M; $MA=10, MB=17$ – похилі. Тоді $NA=2x, NB=5x$. За теоремою Піфагора $MN^2=MA^2-NA^2=MB^2-NB^2\Rightarrow x=3\Rightarrow MN=8$.

III рівень

6. Розв'язати рівняння $\arccos|x|+\cos\pi x=\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

6. З міркувань парності достатньо розглянути $x\ge 0$. Але тоді $x\in[0,1]\Rightarrow \pi x\in[0,\pi]$. Ліва частина рівняння спадає, як сума спадаючих функцій, отже рівняння має не більше одного розвязку (при $x\ge 0$). Легко бачити $x=0,5$. Відповідь: $x=\pm 0,5$.

7. При якому значенні параметра a рівняння $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}=a$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання.

7. а) $a=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x=0, \\ \frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}=0. \end{array}\right.$ Друге рівняння сукупності розв'язків не має, тобто розв'язок єдиний.

б) $a \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}=a.$ Якщо $x=\lambda$ – розв'язок рівняння, то $x=\frac{1}{\lambda}$ – теж розв'язок. Внаслідок єдиності необхідно $\lambda=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\pm 1 \Rightarrow a=\pm\frac{4}{3}.$ Залишається розв'язати рівняння для цих значень параметра і переконатися в єдиності розв'язку.

Відповідь: $a=0, a=\pm\frac{4}{3}.$